Petrova matematická kuchařka

Funkce

Vztah mezi proměnnými, nejčastěji u funkcí jedné reálné proměnné „y“ a „x“, kdy proměnná „y“ závisí na „x“ tj. y=f(x). Zadána předpisem, znázorněna na grafu, případně tabulkou dvojic hodnot [x;y]. Aby se jednalo o funkci, musí ke každému „x“ z definičního oboru existovat nejvýše jedno „y“ z oboru hodnot. Tedy nejsou žádné body na grafu funkce „nad sebou“ (např. svislá přímka není funkce).

Definiční obor funkce D(f)

Množina hodnot „x“, pro které má funkce smysl (existuje), tj. lze tyto hodnoty do funkce dosadit tak, aby vyšlo nějaké „y“.

Vybrané funkce, které mají Df=R

Lineární (přímka) y=a*x+b

Kvadratická (parabola) $y=a*x^2+b*x+c$

Lichá odmocnina $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[5]{x}$ apod.

Exponenciální (exponenciála) $y=a^x$ $y=e^x$

Goniometrické y=sin x , y= cos x

Cyklometrické y=arctg x , arccotg x

Podmínky pro určení Df:

Funkce ve tvaru zlomku: jmenovatel $\neq 0$

Sudá odmocnina $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt[4]{x}$ *atd.* lze odmocnit pouze nezáporné hodnoty ($x \geq 0$)

Logaritmy $y=\log_a x$; y=ln x lze logaritmovat pouze kladné hodnoty ($x>0$)

Goniometrické funkce: $y=tg(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $y=\cot g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ viz zlomky

u tg x: $x \neq (2k+1)*\dfrac{\pi}{2}$ $,k \in Z$ u cotg x: $x \neq k*\pi$ $,k \in Z$

Cyklometrické funkce: y=arcsin x resp. y=arccos x $x \in \langle -1; 1 \rangle$

Viz přehled funkcí.

Postup výpočtu definičního oboru

1) zápis jednotlivých podmínek
2) vyřešení každé podmínky zvlášť (viz. různé možnosti řešení rovnic či nerovnic dle jejich typu, využití tzv. nulových bodů, určování znamének v intervalech osy x pro jednotlivé výrazy atd.)
3) jednotlivé výsledky (např. intervaly pro „x“) zakreslit společně na osu a určit jejich průnik, tím stanovit výsledný definiční obor zadané funkce

1) DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

$f(x) = \sqrt{x^2+8x} + 3\cdot\arccos\frac{x-3}{x+1}$

$x^2+8x \geq 0$

$x\cdot(x+8) \geq 0$

$0 \quad -8$

$(-\infty;-8\rangle \langle -8;0\rangle \langle 0;\infty)$

$-8 \quad 0$

$+ \quad - \quad +$

$x \in (-\infty;-8\rangle \cup \langle 0;\infty)$

$x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

$\frac{x-3}{x+1} \geq -1$

$\frac{x-3}{x+1} + 1 \geq 0$

$\frac{x-3+x+1}{x+1} \geq 0$

$\frac{2x-2}{x+1} \geq 0$

$x=1$

$x=-1$

$(-\infty;-1)(-1;1\rangle \langle 1;\infty)$

$-1 \quad 1$

$+ \quad - \quad +$

$x \in (-\infty;-1) \cup \langle 1;\infty)$

$\frac{x-3}{x+1} \leq 1$

$\frac{x-3}{x+1} - 1 \leq 0$

$\frac{x-3-x-1}{x+1} \leq 0$

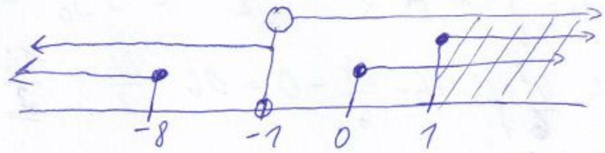
$\frac{-4}{x+1} \leq 0$

$(-\infty;-1)\ (-1;\infty)$

-1

$+ \quad -$

$x \in (-1;\infty)$



$D_f = \langle 1;\infty)$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{x-9}{-x^2+8x-16}} + 3\cdot\log_2(81-x^2)$

$\frac{x-9}{-x^2+8x-16} \geq 0$

nul. body: $x-9=0$

$x=9$

$-x^2+8x-16=0$

$x=4$

$(-\infty;4)\ (4;9\rangle\ \langle 9;\infty)$

$4 \quad 9$

$\frac{x-9}{-x^2+8x-16}$

$+ \quad + \quad -$

$x \in (-\infty;4) \cup (4;9\rangle$

$-x^2+8x-16 \neq 0$

$x^2-8x+16 \neq 0$

$(x-4)^2 \neq 0$

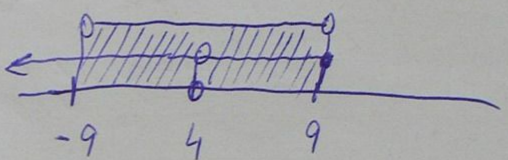
$x \neq 4$

$81-x^2 > 0$

$81 > x^2$

$9 > |x|$

$x \in (-9;9)$

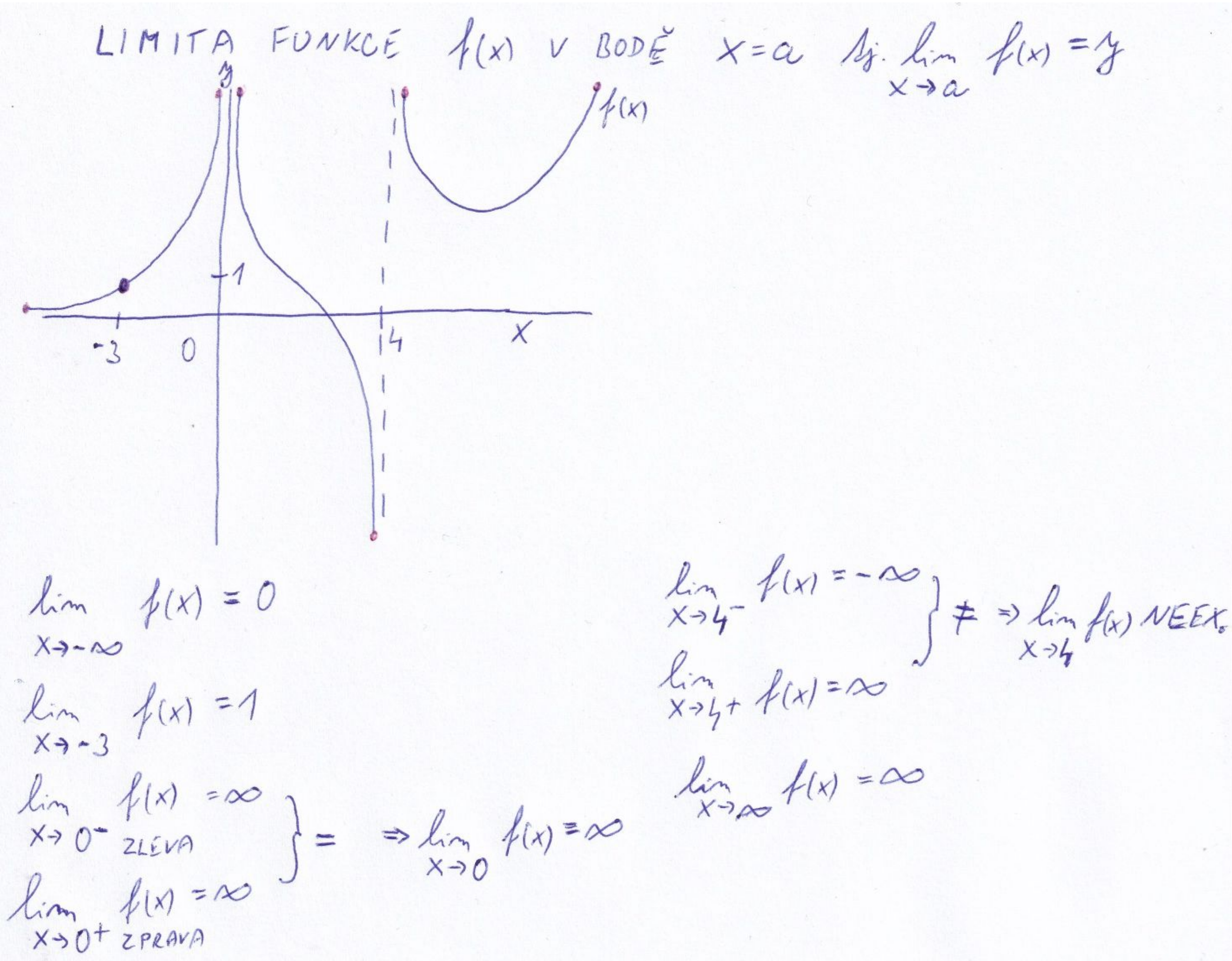


$D_f = (-9;4) \cup (4;9)$

Limita funkce

Hodnota na ose „y“, ke které se funkce přibližuje (nebo ji může někdy i přímo nabývat), pokud se „x“ blíží ke zvolené hodnotě „a“. $\lim_{x \to a} f(x) = y$

Souvislost s grafem funkce – umět z grafu poznat limitu funkce ve zvoleném bodě a naopak vypočtenou limitu umět nakreslit na graf.



Názvy limit

- limita ve vlastním bodě – pokud x→a je konkrétní reálné číslo
- limita v nevlastním bodě – pokud x→a je ±∞
- vlastní limita - pokud výsledek limity „y“ je konkrétní reálné číslo
- nevlastní limita - pokud výsledek limity „y“ je ±∞
- oboustranná limita - pokud se na ose x do bodu „a“ blížíme z obou stran současně a zajímá nás, jak se funkce chová.
- jednostranná limita - pokud se na ose x do bodu „a“ blížíme pouze z jedné strany a zajímá nás, jak se funkce chová.
  Buď *levostranná limita* $x \to a^-$, kde při dosazení volíme za „x“ hodnotu o malinko menší než „a“, nebo *pravostranná limita* $x \to a^+$, kde při dosazení volíme za „x“ hodnotu o malinko větší než „a“.
  Pokud se obě jednostranné limity rovnají, má oboustranná limita stejnou hodnotu.

Dle typu zadané funkce umět limity vypočítat (různé způsoby výpočtu. Pomocí úprav jako vytýkání, rozklad na součin, krácení, společný jmenovatel, různé vzorce apod.) Znát povolené operace s nekonečnem

$a \pm \infty = \pm\infty \quad a \in R \qquad \infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

$a * \infty = \pm\infty \qquad a * (-\infty) = \pm\infty \quad a \in R^* \ (tj.\ a \ \ lze\ i\ \ \infty) \quad \infty * \infty = \infty$

$\frac{a}{\infty} = 0 \quad a \in R \qquad \frac{a}{0} = \pm\infty \quad a \in R^*$

a neurčité výrazy $\infty - \infty \quad 0 * \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 0^\infty$.

„Univerzální“ možnost výpočtu - **tzv. L`Hospitalovo pravidlo**

Pokud platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \ \ nebo \ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f`(x)}{g`(x)}$ pokud druhá limita existuje. Tj. limity funkcí typu **0/0 či** ∞/∞ lze spočítat pomocí derivací.

2) SPOČTĚTE LIMITU. POKUD POUŽIJETE NĚJAKÉ PRAVIDLO, OVĚŘTE JEHO PŘEDPOKLADY.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{9\cdot tg^2x-3}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(7x)} = \frac{9\cdot\left(tg\frac{\pi}{6}\right)^2-3}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(7\cdot\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{9\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-3}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} =$$

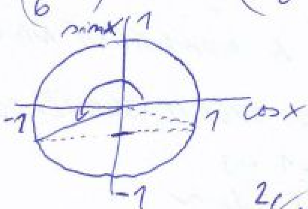
$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\pi = 180°}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{9\cdot 2\cdot tg\,x\cdot\frac{1}{\cos^2x}-0}{0-(-\sin(7x))\cdot 7} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{18\,tg\,x}{\cos^2x}}{7\cdot\sin 7x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{18\cdot tg\,x}{\cos^2x\cdot 7\cdot\sin 7x} = \frac{18\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot 7\cdot \underbrace{\sin\left(7\cdot\frac{\pi}{6}\right)}_{-\frac{1}{2}}} =$$

$$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$



$$= \frac{6\cdot\sqrt{3}}{\frac{3}{4}\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{-\frac{21}{8}} =$$

$$= \frac{\cancel{6}^{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 8}{-\cancel{21}_{7}} = \underline{\underline{\frac{-16\cdot\sqrt{3}}{7}}}$$

Doučování Petr Hadraba (matematika, statistika, ekonomicko matematické metody apod.), tel. 721755339, PHadraba@seznam.cz , www.doucovanispetrem.cz

Asymptoty funkce

Aplikace limity. Jedná se o přímky, ke kterým se funkce přibližuje, ale nedotkne se jich (resp. dotkne se jich v nekonečnu). Mohou být svislé (tzv. bez směrnice), vodorovné či šikmé (tzv. se směrnicí). Určení podle základních vlastností u funkcí, nebo výpočet pomocí limit. Funkce nemůže mít současně na stejné„části“ def. oboru (tj. třeba pro $x\to\infty$) šikmou a vodorovnou asymptotu.

Postup:

1) Určení Df zadané funkce
2)asymptota bez směrnice (svislá): pokud má def. obor tzv. bod(y) nespojitosti (x_0), vypočteme v něm/nich jednostranné limity funkce f(x). Pokud alespoň jedna z jednostranných limit v daném bodě vyjde $\pm\infty$, má funkce f(x) v tomto bodě svislou asymptotu s rovnicí $\mathbf{x=x_0}$
3) asymptoty se směrnicí (šikmé či vodorovné): pokud def. obor obsahuje $\pm\infty$

vypočteme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, k \varepsilon R \quad q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - k * x$

Pozn.: ideální je, když limity v $-\infty$ i ∞ vychází stejně. U „složitějších“ funkcí mohou vyjít i různě. Asymptota pak může být pouze na jedné straně grafu funkce.
Pokud směrnice $k\neq 0$ kromě $\pm\infty$, funkce má šikmou asymptotu s rovnicí **y=k*x+q**
Pokud směrnice k=0, funkce má vodorovnou asymptotu s rovnicí **y=q**
Pokud směrnice k= $\pm\infty$, funkce nemá šikmou ani vodorovnou asymptotu

2) ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE $f(x) = \frac{-2x^2+3x+1}{3-x}$

$D_f = R \setminus \{3\}$

SVISLÁ AS.: $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{-2x^2+3x+1}{3-x} = \frac{-18+9+1}{+0} = \frac{-8}{+0} = -\infty$

(2,99)

$\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-2x^2+3x+1}{3-x} = \frac{-18+9+1}{-0} = \frac{-8}{-0} = +\infty$

(3,01)

$\Rightarrow$ EXISTUJE ; ROVNICE SV. AS. $\underline{\underline{x=3}}$

ŠIKMÁ AS. $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3x+1}{(3-x)\cdot x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3x+1}{3x-x^2} = \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3x+1}{3-x} - 2\cdot x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3x+1-2x\cdot(3-x)}{3-x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3x+1-6x+2x^2}{3-x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x+1}{3-x} = \frac{-3}{-1} = \underline{\underline{3}}$$

EXISTUJE ; ROVNICE $\underline{\underline{y = 2x+3}}$

Lze počítat vodorovnou asymptotu i zvlášť pomocí $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, které musí vyjít stejné reálné číslo „a“. Rovnice vodorovné asymptoty je pak y=a.

2) VODOROVNÁ AS.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2+3x+1}{3-x} = \frac{-\infty-\infty+1}{3+\infty} = \text{"}-\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x+3}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2+3x+1}{3-x} = \text{"}\frac{-\infty+\infty+1}{3-\infty}\text{"} = \text{"}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-4x+3}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = \infty$$

$\Rightarrow$ NEEXISTUJE VODOR. AS.

Derivace funkce

Derivace funkce je definována limitou $f`(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Pokud tato limita existuje, je rovna hodnotě derivace funkce ve zvoleném bodě x_0. Lze ji tedy chápat jako změnu hodnot na ose „y“ vůči změně hodnot na ose „x“.

Např. změna dráhy v čase = rychlost. Změna rychlosti v čase = zrychlení.

Má souvislost s průběhem funkce, protože **derivace funkce v určeném bodě je rovna směrnici tečny** ke grafu funkce v tomto (tzv. tečném) bodě.

Umět derivovat různé typy operací s funkcemi (jednotlivé členy funkce tvoří např. součet, rozdíl, součin, podíl či složenou funkci) a různé typy funkcí (konstantní, mocninná, exponenciální atd.) dle vzorečníku! Do vypočtené derivace umět dosadit určenou hodnotu za „x“ a tím vypočítat hodnotu derivace funkce v bodě „x_0“

1) HODNOTA 2. DERIVACE FUNKCE f V BODĚ $x=-1$

$$f(x)=\frac{e^x\cdot(x-3)}{2x+3}$$

$$!\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}\ !$$

$$!\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'\ !$$

$$f'_{(x)}=\frac{[e^x\cdot(x-3)]'\cdot(2x+3)-e^x\cdot(x-3)\cdot(2x+3)'}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{(e^x\cdot(x-3)+e^x\cdot 1)\cdot(2x+3)-e^x\cdot(x-3)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{e^x\cdot[\overbrace{(x-3+1)}^{x-2}\cdot(2x+3)-(x-3)\cdot 2]}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{e^x\cdot(2x^2-x-6-2x+6)}{(2x+3)^2}=\frac{e^x\cdot(2x^2-3x)}{(2x+3)^2}\quad \frac{u}{v}$$

$$f''(x)=\frac{[e^x\cdot(2x^2-3x)+e^x\cdot(4x-3)]\cdot(2x+3)^2-e^x\cdot(2x^2-3x)\cdot 2\cdot(2x+3)\cdot 2}{(2x+3)^4}$$

$$f''(-1)=\frac{[e^{-1}\cdot 5+e^{-1}\cdot(-7)]\cdot 1^2-e^{-1}\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1^4}=\frac{-2e^{-1}-20e^{-1}}{1}=$$

$$=-22e^{-1}=-\frac{22}{e}$$

Tečna a normála

Rovnice tečny a normály k funkci f(x) v bodě T[x_0 ; f(x_0)] lze definovat např. těmito vzorci

t: $y-f(x_0)=f`(x_0)*(x-x_0)$, **n:** $y-f(x_0)=\frac{-1}{f`(x_0)}*(x-x_0)$

Dá se používat více možných tvarů zápisu. Vychází se také z rovnice přímky **y=k*x+q** , kde „k“ je směrnice této přímky a tedy z definice derivace platí f`(x_0)=k. Rovněž platí, že součin směrnic dvou kolmých přímek je roven -1 a protože tečna a normála jsou na sebe kolmé, tak $k_t * k_n = -1$.
Zároveň platí, že směrnice dvou rovnoběžných přímek je stejná.

Pokud známe hodnotu „x_0“
1) výpočet f(x_0)
2)výpočet f `(x)
3) výpočet hodnoty f `(x_0)
4) zápis rovnic tečny a normály *(pozor když f `(x_0) =0)*

Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f(x) v bodě grafu T=[2;?]

2) $f(x) = x \cdot e^{x^2-4x+4} + 4x$ $\quad T = [2;\ ?]$

$f(2) = 2 \cdot e^{4-8+4} + 8 = 2 \cdot 1 + 8 = \underline{\underline{10}}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2-4x+4} + x \cdot e^{x^2-4x+4} \cdot (2x-4) + 4$

$f'(2) = 1 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0 \cdot (4-4) + 4 = 1 + 0 + 4 = \underline{\underline{5}}$

tečna

$y - 10 = 5 \cdot (x-2)$

$y = 5x - 10 + 10$

$\underline{\underline{y = 5x}}$

normála: $y - 10 = -\frac{1}{5} \cdot (x-2)$

$y - 10 = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$

$\underline{\underline{y = -\frac{1}{5}x + \frac{52}{5}}}$

Pokud neznáme tečný bod, tj. hodnotu „x_0“, ale např. **tečna** má být **rovnoběžnáse** zadanou **přímkou p**

1) vyjádřit si směrnici přímky p k_p → směrnice tečny k_t je díky rovnoběžnosti stejná

2) výpočet f `(x)

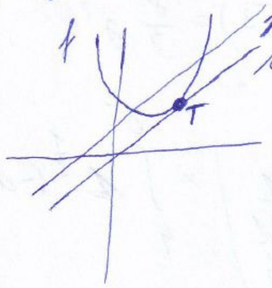
3) položíme f `(x) = k_t a výpočet x_0

4) výpočet f (x_0)

5) zápis rovnic tečny a případně normály

2) NAPIŠTE ROVNICE VŠECH TEČEN KE GRAFU FUNKCE f, KTERÉ JSOU ROVNOBĚŽNÉ S PŘÍMKOU p:

$f: y = 4x^2 - 6x + 5$ $\quad p: -6x + 3y - 5 = 0$



$\Rightarrow y = \frac{6x+5}{3} = 2x + \frac{5}{3} \to$ SMĚRNICE TEČNY $= 2$

$\Rightarrow f'(x_T) = 2$

$f'(x) = (4x^2 - 6x + 5)' = 8x - 6$

$8x - 6 = 2$

$8x = 8$

$x = 1 \to \underline{x_T = 1}$ $\quad$ } $T = [1; 3]$

$y_T = f(x_T) = f(1) = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = \underline{\underline{3}}$

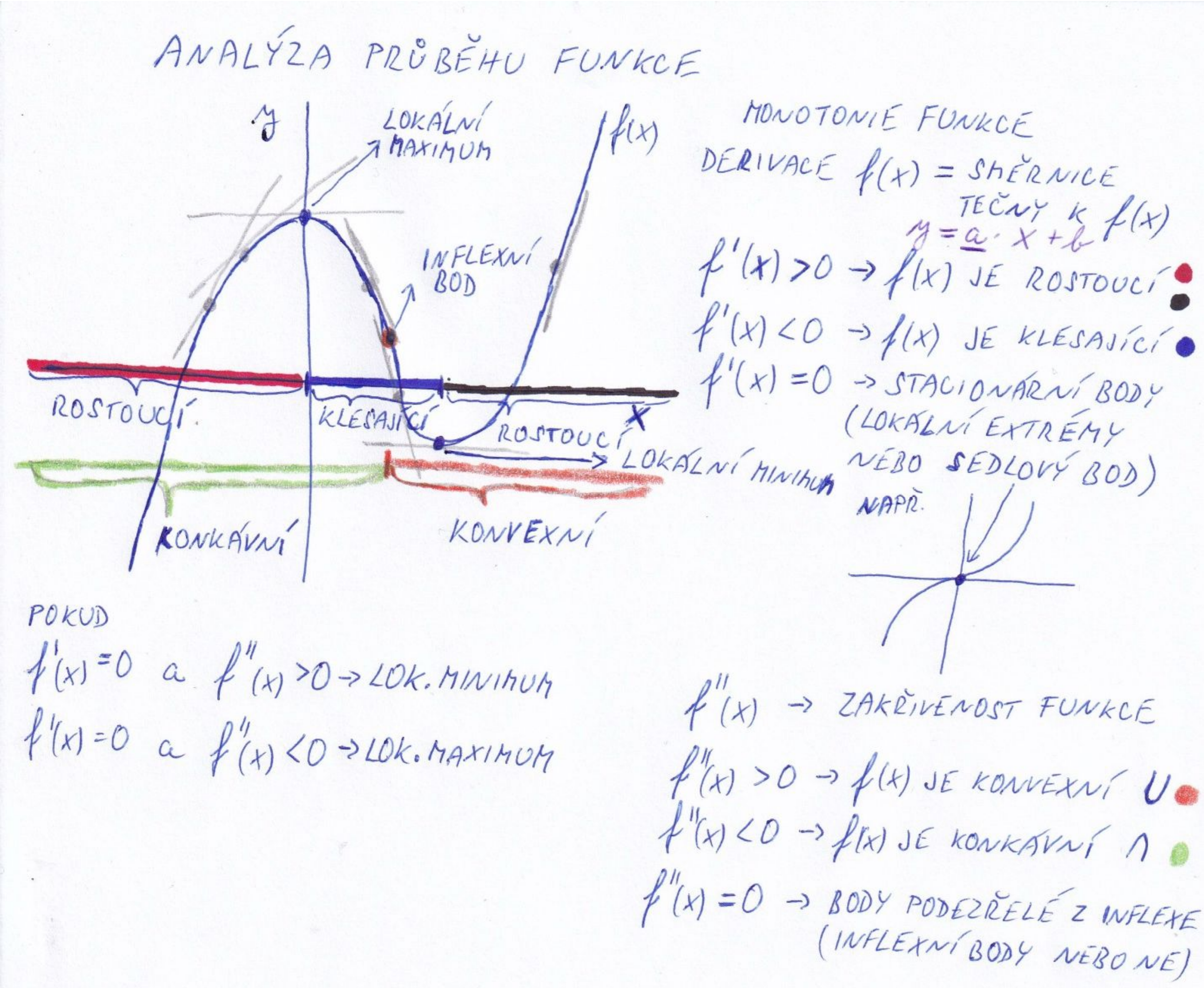
ROVNICE TEČNY $y - f(x_T) = f'(x_T) \cdot (x - x_T)$ NEBO PODOBNÉ ZNAČENÍ

$y - 3 = 2 \cdot (x-1)$

$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$

Pozor na další alternativy, kdy má být třeba tečna kolmá na přímku apod. Je vhodné si nakreslit obrázek a uvědomit si, co s čím je rovnoběžné či kolmé.

Použití derivace na analýzu průběhu funkce



Monotonie funkce

Zda se jedná o funkci rostoucí, klesající apod. Resp. určit intervaly z def. oboru, ve kterých je funkce rostoucí/klesající atd. Vždy na funkci nahlížíme „zleva doprava". Pokud s rostoucími hodnotami „x" roste „y", jedná se o rostoucí funkci. Když s rostoucími hodnotami „x" se „y" snižuje, jedná se o klesající funkci. Určení na základě znalosti základních funkcí a jejich parametrů, nebo výpočet pomocí derivací.

$f`(x) > 0$ → f(x) je rostoucí (na intervalech, kde je funkce rostoucí jsou i její tečny rostoucí přímky, mají tedy kladnou směrnici a proto má funkce kladnou derivaci)

$f`(x) < 0$ → f(x) je klesající (na intervalech, kde je funkce klesající jsou i její tečny klesající přímky, mají tedy zápornou směrnici a proto má funkce zápornou derivaci)

$f`(x) = 0$ → stacionární body (extrémy (lokální MAX či lokální MIN), nebo sedlové body)

Postup

1) určit Df

2) vypočítat f `(x)

3)z rovnice f `(x) = 0 vypočítat stacionární bod/y (resp. jejich souřadnici na ose x)

4) def. obor si zobrazit na ose x, rozdělit jej díky stacionárním bodům na jednotlivé intervaly a v nich zjistit, zda má f `(x) kladnou či zápornou hodnotu

5) dle znaménka f `(x) určit v jakých intervalech je funkce f(x) rostoucí resp. klesající

3) MAXIMÁLNÍ INTERVALY MONOTONIE FUNKCE

$f(x)=5^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$

Df: $-x^2+3x+4\geq 0$ $\quad (-\infty;-1\rangle\langle -1;4\rangle\langle 4;\infty)$ $\quad D_f=\langle -1;4\rangle$

$x^2-3x-4\leq 0$

$(x-4)\cdot(x+1)\leq 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$4 \quad -1$

$-1 \quad 4$

$+ \quad - \quad +$

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

!

$f'(x)=5^{\sqrt{-x^2+3x+4}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{-x^2+3x+4}}\cdot(-2x+3)$

$=\frac{5^{\sqrt{-x^2+3x+4}}\cdot\ln 5\cdot(-2x+3)}{2\cdot\sqrt{-x^2+3x+4}}$ $\quad f'(x)=0$

$\frac{5^{\sqrt{-x^2+3x+4}}\cdot\ln 5\cdot(-2x+3)}{2\cdot\sqrt{-x^2+3x+4}}=0 \quad /\cdot 2\cdot\sqrt{\ldots}$

! $a^x=0$ NEMÁ ŘEŠENÍ VŽDY KLADNÉ

! JMENOVATEL DÍKY $\sqrt{\ }$ KLADNÝ !

$5^{\sqrt{-x^2+3x+4}}\cdot\ln 5\cdot(-2x+3)=0$

$\hookrightarrow x=\frac{3}{2}$

3) (3)

$\langle -1;\frac{3}{2}\rangle \quad \langle\frac{3}{2};4\rangle$

$-1 \quad \frac{3}{2} \quad 4$

$f'(x) \quad + \quad -$

$f(x) \quad \nearrow \quad \searrow$

FUNKCE JE ROSTOUCÍ PRO $x\in\langle -1;\frac{3}{2}\rangle$ A KLESAJÍCÍ PRO $x\in\langle\frac{3}{2};4\rangle$.

Extrémy funkce

Body, ve kterých funkce nabývá maximální či minimální hodnoty – lokální nebo globální extrémy. Musí se jednat o konkrétní bod (ne nekonečno), který leží v def. oboru a funkce v něm má konkrétní funkční hodnotu (opět ne nekonečno). Výpočet u základních funkcí dle různých vlastností, jinak na základě derivací.

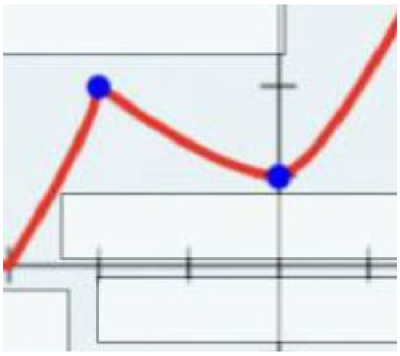
Lokální: LOK. MAX v bodě x_0 když $f`(x_0)=0$ a $f``(x_0)<0$

LOK. MIN v bodě x_0 když $f`(x_0)=0$ a $f``(x_0)>0$

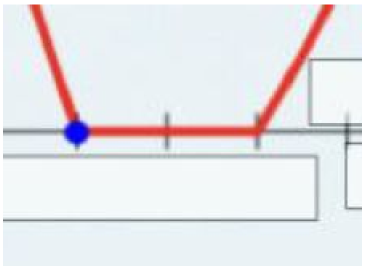
nebo určit podle monotonie funkce, protože v těchto extrémech dochází ke změně monotonie.

U předchozího příkladu je lokální maximum v bodě $x=\frac{3}{2}$. Případně lze ještě dopočítat funkční hodnotu v tomto bodě. tj. $f(\frac{3}{2})=5^{\sqrt{-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3*\frac{3}{2}+4}}=\sqrt{5^5}=25*\sqrt{5}$

Povaha lokálních extrémů: ostrý – pokud funkce mění monotonii pouze v tomto jediném bodě



neostrý – pokud se mezi klesající a rostoucí křivkou funkce nachází konstantní část



Globální (absolutní): největší a nejmenší hodnota (vždy konkrétní číslo), které funkce nabývá (na ose y) na stanoveném intervalu **I** (na ose x) (případně na celém Df).
Mohou nastat v:

- lokálních extrémech funkce ležících uvnitř zadaného intervalu,
- krajních bodech zadaného intervalu
- vnitřních bodech intervalu, ve kterých neexistuje derivace (není moc časté)

Ve všech takových bodech se vypočte funkční hodnota (pokud tyto body leží v Df) a podle jejího maxima a minima se určí v jakém bodě je hledaný globální extrém funkce.
Povaha globálních extrémů: ostrý – pokud má funkce funkční hodnotu extrému pouze jednou (je unikátní) ; neostrý – pokud má funkce funkční hodnotu extrému víckrát (opakuje se)

3) NALEZNĚTE VŠECHNY LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE

$$f(x) = \ln(4x^2+8x+5) + \ln 3$$ NA INTERVALU $I = \langle -3; 2 \rangle$ A

URČETE JEJICH KVALITU.

FUNKCE JE DEFINOVANÁ NA CELÉM INTERVALU, PROTOŽE SAMA MÁ $D_f = \mathbb{R}$.

$4x^2+8x+5 > 0$

$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 5 < 0$

→ NEMÁ KOŘENY V $\mathbb{R}$

→ NEPROTÍNÁ OSU X

LOK. EXTRÉMY: $$f'(x) = \frac{1}{4x^2+8x+5} \cdot (8x+8) + 0! = \frac{8x+8}{4x^2+8x+5}$$

$$\frac{8x+8}{4x^2+8x+5} = 0 \quad / \cdot (4x^2+8x+5)$$

$4x^2+8x+5 \to$ VŽDY +

$8x+8 = 0$

$x = -1 \in I$

$\langle -3; -1 \rangle \quad \langle -1; 2 \rangle$

	$\langle -3; -1 \rangle$	$\langle -1; 2 \rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

V BODĚ $x = -1$ JE LOKÁLNÍ MINIMUM (OSTRÉ)

GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

PODEZŘELÉ BODY

$x = -3$, $x = 2$ } KRAJNÍ BODY I

$x = -1$ LOK. EXTR.

$f(-3) = \ln(4 \cdot 9 + 8 \cdot (-3) + 5) + \ln 3 = \ln 17 + \ln 3$

$f(2) = \ln(4 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 5) + \ln 3 = \ln 37 + \ln 3 \to$ MAX

$f(-1) = \ln(4 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 5) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 \to$ MIN

→ OSTRÉ GLOB. MAXIMUM V $x = 2$; OSTRÉ GLOB. MINIMUM V $x = -1$

Zakřivenost (vypuklost) funkce

Určení intervalů z def. oboru, ve kterých se jedná o daný typ zakřivenosti křivky funkce. Výpočet opět pomocí základních vlastností funkcí, případně u složitějších funkcí pomocí druhé derivace.

$f``(x) > 0$ → f(x) je konvexní (tvar ∪)
$f``(x) < 0$ → f(x) je konkávní (tvar ∩)
$f``(x) = 0$ → body podezřelé z inflexe (inflexní body)

Postup
1) určit Df
2) vypočítat f `(x)
3) vypočítat f ``(x)
4) z rovnice f ``(x) = 0 vypočítat bod/y podezřelé z inflexe (resp. jejich souřadnici na ose x)
5) def. obor si zobrazit na ose x, rozdělit jej díky vypočteným bodům na jednotlivé intervaly a v nich zjistit, zda má f ``(x) kladnou či zápornou hodnotu
6) dle znaménka f ``(x) určit v jakých intervalech je funkce f(x) konvexní resp. konkávní

3) MAXIMÁLNÍ INTERVALY KONVEXITY A KONKÁVITY FUNKCE

VNĚJŠÍ VNITŘNÍ

$f(x) = x + \operatorname{arctg}(2x+3)$ $\quad \boxed{Df = R}$ $\quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+(2x+3)^2} \cdot 2 = 1 + \frac{2}{1+(2x+3)^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'$$

$$f''(x) = 0 + \frac{0 \cdot (1+(2x+3)^2) - 2 \cdot (0 + 2 \cdot (2x+3)^1 \cdot 2)}{[1+(2x+3)^2]^2} =$$

$$= \frac{-8 \cdot (2x+3)}{[1+(2x+3)^2]^2} \qquad f''(x) = 0$$

$$\frac{-8 \cdot (2x+3)}{[1+(2x+3)^2]^2} = 0 \quad / \cdot (\quad)^2$$

$\oplus$

$-8 \cdot (2x+3) = 0$

$2x+3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

$(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle \quad \langle -\frac{3}{2}; \infty)$

$-\frac{3}{2}$

$f''(x)$: $+$ $\quad -$

$f(x)$: ∪ $\quad$ ∩

FUNKCE JE KONVEXNÍ NA $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}\rangle$ A KONKÁVNÍ NA $\langle -\frac{3}{2}; \infty)$

Inflexní body

Body, ve kterých funkce mění svou zakřivenost. Podobně jako u extrémů se musí jednat o body z def. oboru s konkrétní hodnotou na obou osách „x“ i „y“, kterými funkce prochází.

U předchozího příkladu je inflexní bod v bodě $x = -\frac{3}{2}$. Případně lze ještě dopočítat funkční hodnotu v tomto bodě. tj. $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} + arctg(2 * \frac{-3}{2} + 3) = \frac{-3}{2}$

Taylorův polynom n-tého stupně funkce f(x) v bodě x=a. viz vzorečník z ČZU

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f`(a)}{1!} * (x-a) + \frac{f``(a)}{2!} * (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x-a)^n$$

Slouží jako možnost aproximace zvolené funkce pomocí polynomické funkce v okolí vybraného bodu ležícího na původní funkci.

Postup

1) Vypočítat f(a)

2) Postupně spočítat jednotlivé derivace funkce f(x) a jejich hodnoty v bodě x=a

3) Zapsat Taylorův polynom. Zjednodušit (ale závorky obvykle neumocňovat, pokud se a≠0).

Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce f (x) v bodě a=0

1) $f(x) = \frac{x^2+9x+3}{e^x}$ $\quad a=0 \quad \boxed{e^0=1} \quad 2! = 2 \quad 3! = 6$

$f(0) = \frac{3}{1} = 3$

$f'(x) = \frac{(2x+9)\cdot e^x - (x^2+9x+3)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (-x^2-7x+6)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2-7x+6}{e^x}$

$f'(0) = \frac{6}{1} = 6$

$f''(x) = \frac{(-2x-7)\cdot e^x - (-x^2-7x+6)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^2+5x-13}{e^x}$

$f''(0) = -13$

$f'''(x) = \frac{(2x+5)\cdot e^x - (x^2+5x-13)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2-3x+18}{e^x}$

$f'''(0) = 18$

$T^3 f(0) = 3 + 6\cdot(x-0) + \frac{-13}{2!}(x-0)^2 + \frac{18}{3!}\cdot(x-0)^3$

$= 3 + 6x - \frac{13}{2}x^2 + 3x^3$

Dále se derivace využívají v integrálech, diferenciálních rovnicích atd.

Další různé vlastnosti funkcí (znalosti ze SŠ)

Obor hodnot H(f) = množina hodnot na ose „y“, které funkce vytvoří. Tj. hodnoty, které mohou z funkce vyjít. Viz základní funkce, případně dle grafu a jiných výpočtů u složitějších funkcí. Souvisí s extrémy funkcí, limitami apod.

Průsečíky funkcí s osami souřadnic → body [x;0] či [0;y]. Na ose x jich může být i více, na ose y maximálně jeden.

Sudost/Lichost funkce
- sudá funkce je souměrná podle osy y, platí pro ni: $f(x) = f(-x)$
- lichá funkce je souměrná podle středu souřadnic [0;0], platí pro ni: $-f(x) = f(-x)$

Prostost funkce – funkce je prostá, pokud je rostoucí (či klesající) na celém svém Df.

Omezenost funkce – hodnota na ose y, která funkci omezuje (souvisí případně s limitami, asymptotami a oborem hodnot). Této hodnoty může funkce konkrétně dosáhnout, nebo se k ní pouze přibližuje. Nemůže se jednat o ± nekonečno.
- shora omezená funkce – funkce se nedostane nad nějakou hodnotu na ose y
- zdola omezená funkce – funkce se nedostane pod nějakou hodnotu na ose y
- omezená funkce – funkce, která je omezená shora i zdola (např. sin x)

Inverzní funkce ($f^{-1}(x)$) – existuje k funkcím prostým, s původní funkcí je na grafu souměrná podle přímky y=x (tedy osy 1. a 3. kvadrantu). Platí pro ni $Df^{-1} = Hf$ a opačně $Hf^{-1}=Df$. Výpočet pomocí záměny proměnných „x“ a „y“ v předpisu původní funkce a následném vyjádření proměnné y (případně opačně nejprve vyjádřením proměnné „x“ a poté záměně proměnných „x“ a „y“). Vzájemně inverzní typy funkcí:
lineární ↔ lineární
kvadratická ↔ druhá odmocnina
lineárně lomená ↔ lineárně lomená
exponenciální ↔ logaritmická
goniometrická ↔ cyklometrická

Integrace funkce

opak derivace (antiderivace)

- Neurčitý $\int f(x)dx = F(x) + c$ výsledkem je primitivní funkce F(x) + konstanta C

  pokud by se zderivovalo zpět, vyšla by opět zadaná funkce

- Určitý – $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \check{c}\acute{\imath}slo$

výsledkem je hodnota – používá se pro výpočet plochy obrazců, objemu rotačních těles, délky křivky apod.

Základní metody integrace
pro neurčitý integrál

- Přímá metoda – pro součet a rozdíl základních funkcí, dle vzorců $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(občas je třeba výraz nejprve vhodně upravit, abychom získali základní funkce, na které použijeme jednotlivé vzorce pro integraci)

- Metoda per partes – pro součin základních funkcí $\int u`*v = u*v - \int u*v`$

členy „u`" a „v" volit tak, aby další integrál obsahoval jednodušší výraz než je v zadání. Pokud je v zadání výraz $x^n$, snažíme se jej volit jako „v", abychom derivací zmenšili jeho exponent. Druhý výraz ale musíme v takovém případě umět integrovat (z „u`" vypočítat „u", což jednoduše nelze např. u logaritmů či cyklometrických funkcí…). Někdy je třeba použít tuto metodu vícekrát za sebou, také pozor na příklady, kde se výpočet „zacyklí", tj. v průběhu vyjde stejný integrál jako v zadání.

- Metoda substituce – pro složené funkce

$$\int f(g(x)) * g`(x)dx = \left| \begin{matrix} g(x) = t \\ g`(x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = \ldots = F(t) = F(g(x)) + C$$

Opět snaha o zjednodušení výrazu, který chceme integrovat. Obvykle volíme substituci za vnitřní funkci.Po integrování nezapomenout na zpětnou substituci. Často kombinace více metod u složitějších příkladů.

4) $\int x\cdot\left(e^x + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx = \int x\cdot e^x dx + \int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$

$$\left| \begin{matrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = x & v' = 1 \end{matrix} \right| \quad \boxed{\text{PER PARTES}} \qquad \left| \begin{matrix} 4+x^2 = t \\ 2x\cdot dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{matrix} \right| \quad \boxed{\text{SUBSTIT.}}$$

$$= e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1dx + \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2\cancel{x}} = e^x\cdot x - e^x + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= e^x\cdot x - e^x + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + C = \underline{\underline{e^x\cdot x - e^x + \sqrt{4+x^2} + C}}$$

pro určitý integrál

používají se jako u neurčitých, ale následně se dosazují meze integrálu pro výpočet konkrétního číselného výsledku.

- Přímá metoda – pro součet a rozdíl základních funkcí, dle vzorců

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \left[F(x) \pm G(x)\right]_a^b = \left[F(b) \pm G(b)\right] - \left[F(a) \pm G(a)\right]$$

- Metoda per partes – pro součin základních funkcí $\int_a^b u`*v = \left[u*v\right]_a^b - \int_a^b u*v`$

- Metoda substituce – pro složené funkce

$$\int_a^b f(g(x))*g`(x)dx = \begin{vmatrix} g(x)=t & a \to g(a) \\ g`(x)=dt & b \to g(b) \end{vmatrix} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \left[F(t)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pokud nebudeme počítat jako neurčitý a dosazovat jednotlivé meze až do výsledné primitivní funkce F(x), je třeba v případě substituce přepočítat zadané meze, aby platily pro novou proměnnou „t“. Ty pak lze po integrování rovnou dosadit za tuto novou proměnnou a dopočítat výsledek.

5) $$\int_{-3\pi}^{-2\pi} \sin\frac{x+6\pi}{4}\,dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+6\pi}{4} = t \\ \frac{1}{4}dx = dt \\ dx = 4\cdot dt \\ x=-3\pi \quad t=\frac{3\pi}{4} \\ x=-2\pi \quad t=\pi \end{array} \right| = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t\cdot 4\,dt$$

$$= \left[-4\cos t\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = -4\cdot\cos\pi + 4\cdot\cos\frac{3\pi}{4} = -4\cdot(-1)+4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

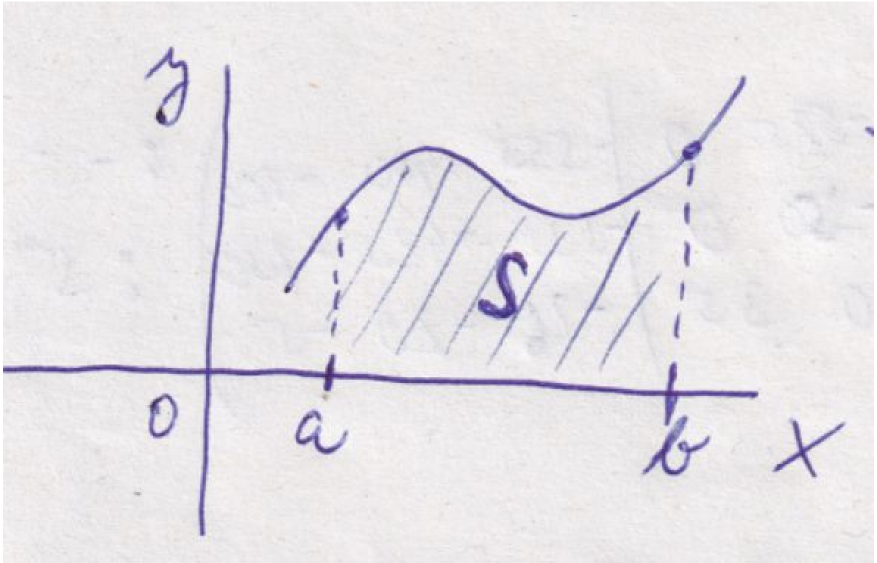
$$= \underline{\underline{4-2\cdot\sqrt{2}}}$$

Výpočet obsahu plochy ohraničené křivkami (funkcemi)

Aplikace určitého integrálu. Dle vzorců.

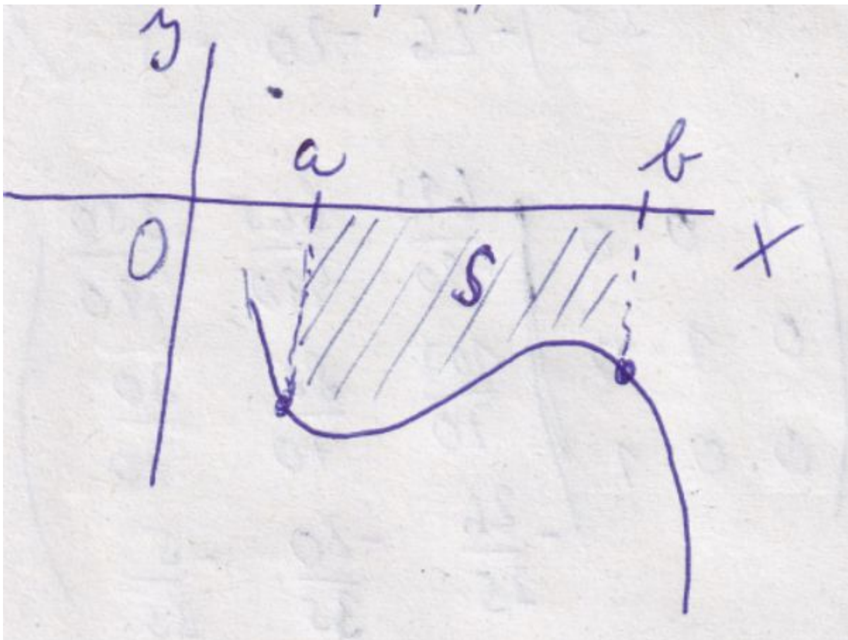
a) Výpočet obsahu plochy ohraničené funkcí f(x) a osou „x“ na intervalu <a;b> pokud je f(x)≥0 na tomto intervalu, tj. plocha „pod“ funkcí f(x).

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



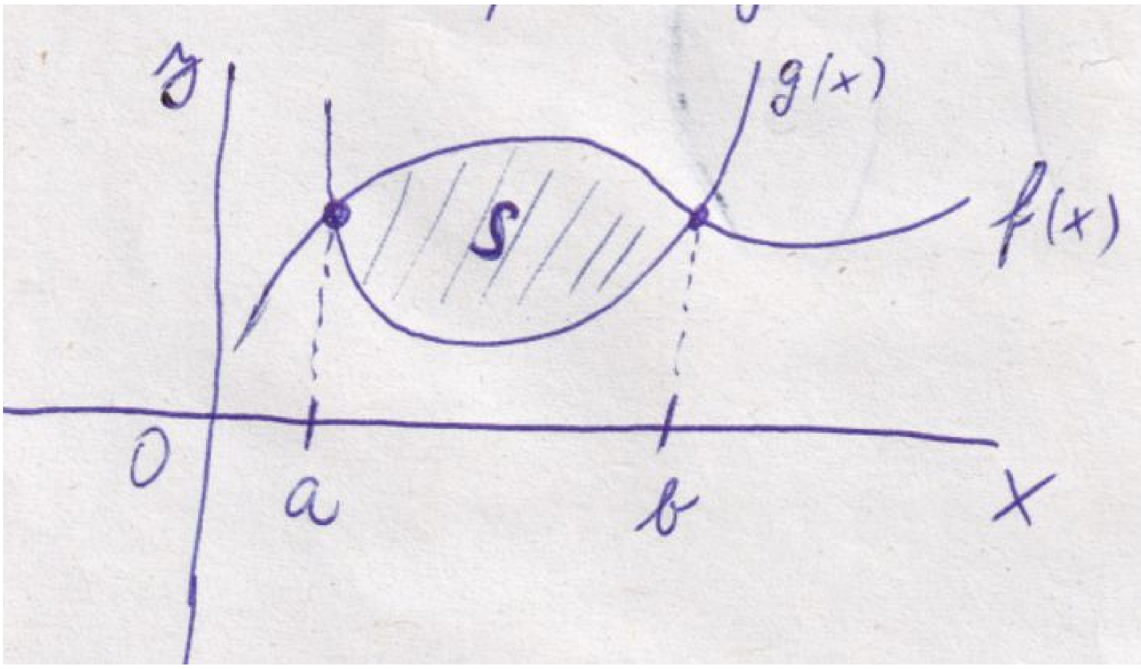
b) Výpočet obsahu plochy ohraničené funkcí f(x) a osou „x“ na intervalu <a;b> pokud je f(x)≤0 na tomto intervalu, tj. plocha „nad“ funkcí f(x).

$$S=\int_a^b 0-f(x)dx$$



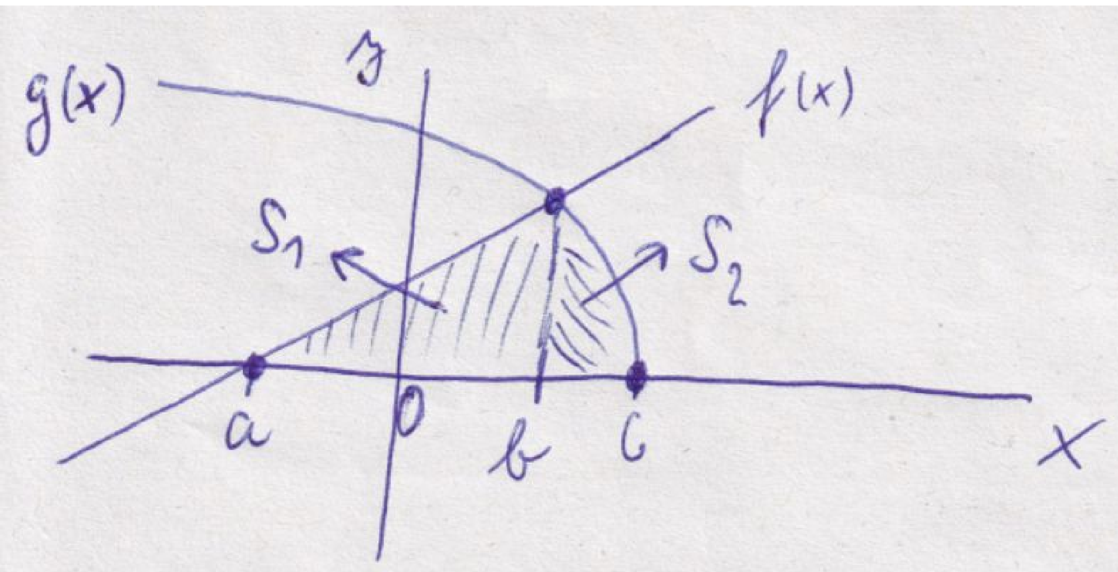
c) Výpočet obsahu plochy ohraničené funkcemi f(x) a g(x) na intervalu <a;b> pokud je f(x)≥g(x) na tomto intervalu.Tj. f(x) je „horní“ funkce a g(x) je „dolní funkce.

$$S = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$



d) Výpočet obsahu plochy ohraničené více funkcemi. Pokud není obrazec ohraničen shora či zdola stále stejnou funkcí, je třeba jej rozdělit na více částí a výpočet provést více integrály.

S=S_1+S_2, kde $S_1 = \int_a^b f(x) - 0\,dx$ $S_2 = \int_b^c g(x) - 0\,dx$



Postup **pokud máme 2 křivky** ohraničující plochu (graf dokáže hodně pomoci)

1) Výpočet průsečíků těchto křivek (funkcí) (resp. jejich x-ových souřadnic). Obě funkce dáme vzájemně do rovnosti. Tím získáme meze integrálu „a“ a „b“
2) Zjištění, která z křivek ohraničuje obrazec ze shora a zdola. Výpočtem funkční hodnoty u obou křivek pro libovolně zvolené číslo „x“ z intervalu (a;b). Funkce, která má větší funkční hodnotu ohraničuje obrazec shora.

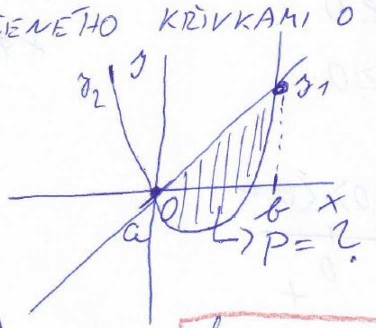
3) Zápis integrálu pro výpočet obsahu S či $\mathrm{P} = \int_a^b \text{"horní"funkce} - \text{"dolní"funkce}\, dx$

4) Výpočet integrálu

5) OBSAH ROVINNÉHO OBRAZCE OHRANIČENÉHO KŘIVKAMI O ROVNICÍCH

$x - y = 0$ a $y = \frac{x^2}{2} - x$

$\underbrace{y_1 = x}$ $\quad \underbrace{y_2 = \frac{x^2}{2} - x}$



PRŮSEČÍKY => MEZE ∫

$x = \frac{x^2}{2} - x$

$0 = \frac{x^2}{2} - 2x \quad /\cdot 2$

$0 = x^2 - 4x$

$0 = x\cdot(x-4)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 4$

$\boxed{a=0 \quad b=4}$

URČENÍ FUNKCÍ V ∫

NAPŘ $x = 1 \in (a;b)$

$y_1(1) = 1$

$y_2(1) = \frac{1^2}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\boxed{y_1 > y_2}$

$P = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$

$f(x) \geq g(x)$ na $\langle a;b \rangle$

$$P = \int_0^4 x - \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \int_0^4 2x - \frac{1}{2}x^2\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4$$

$$= \left(4^2 - \frac{4^3}{6}\right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{6}\right) = 16 - \frac{64}{6} - 0 = 16 - \frac{32}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}\ j^2$$

Postup **pokud máme více křivek** ohraničující plochu (graf téměř nutný). Obvykle znamená, že bude třeba celou plochu rozdělit na několik dílčích ploch a obsah každé z nich spočítat zvlášť.

1) Výpočet průsečíků různých dvojic křivek (funkcí) (resp. jejich x-ových souřadnic). Vždy dvě funkce dáme vzájemně do rovnosti. Tím postupně získáme meze integrálů „a“, „b“, „c“ atd.

2) Zjištění, která z křivek ohraničuje obrazec ze shora a zdola. Výpočtem funkční hodnoty u obou křivek (z těch, které jsme dali vždy po dvojicích do rovnosti) pro libovolně zvolené číslo „x“ z intervalu (a;b) , (b;c) atd. Funkce, která má větší funkční hodnotu ohraničuje obrazec shora.

3) Zápis jednotlivých integrálu pro výpočet obsahu $S_1 = \int_a^b \text{"horní"funkce} - \text{"dolní"funkce}\, dx$ atd.

4) Výpočet integrálů. Jednotlivé výsledky pak sečíst a tím získat obsah celé plochy.

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice obsahující jak nederivované funkce/výrazy/proměnné (x a y), tak derivované (nejčastěji derivace funkce y). Řešením rovnice je funkce „y“ závislá na proměnné x.K vyřešení je třeba často použít jak derivování, tak integrování.

Názvosloví (dělení rovnic)

- homogenní – pokud všechny členy obsahují proměnnou „y“
- nehomogenní – pokud nějaký člen neobsahuje proměnnou „y“

Řád (stupeň) diferenciální rovnice – podle toho, jaká nejvyšší derivace se v rovnici vyskytuje.

Nás budou zajímat diferenciální rovnice 1. řádu (obsahující max. 1. derivaci y`), nebo rovnice 2. řádu (obsahující max. 2. derivaci y``)

Existuje spoustu metod, kterými se dají diferenciální rovnice řešit. Není bohužel žádná univerzální. Vhodnost jejich použití závisí na typu diferenciální rovnice.

Časté způsoby řešení

1) Přímá metoda

Nejjednodušší rovnice, ve kterých se vyskytuje POUZE jeden člen s derivací funkce y (např. jen y` či y``) a další členy obsahující výrazy s proměnnou „x“ či konstanty lze řešit metodou přímou metodou (tedy jen integrací výrazů s proměnnou „x“ či konstantami)

Např. u nehomogenní dif. rovnice 1. resp. 2. řádu.

$$
\begin{aligned}
& y` - 5x^2 + 10 = 0 \\
& y` = 5x^2 + 10 \\
& y = \int 5x^2 + 10 dx \\
& y = \frac{5x^3}{3} + 10x + C \quad , C \in R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y`` - 2\cos x = 0 \\
& y`` = 2\cos x \\
& y` = \int 2\cos x dx \\
& y` = 2\sin x + C_1 \quad , C_1 \in R \\
& y = \int 2\sin x + C_1 dx \\
& y = -2\cos x + C_1 x + C_2 \quad , C_{1,2} \in R
\end{aligned}
$$

Výslednému řešení se říká **obecné řešení**. Díky libovolné konstantě/konstantám C resp.z množiny R je řešením nekonečně mnoho funkcí vzájemně posunutých po ose y.

Pokud jsou v zadání stanoveny tzv. počáteční podmínky, např. y(0)=6, znamená to, že je cílem určit jednu konkrétní funkci „y“, která prochází zadaným bodem [0;6]. Je tedy třeba vypočítat hodnotu konstanty C a vzniklé řešení ve tvaru y=f(x)+ hodnota C se nejčastěji nazývá **partikulární řešení**.

VYPOČTĚTE HODNOTU $f(\frac{\pi}{2})$, JE-LI FUNKCE f PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE $y' - \sin x = 0$ VYHOVUJÍCÍ POČÁTEČNÍ PODMÍNCE $y(0) = 20$

→ NEHOMOGENNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU, ALE OBSAHUJE POUZE y' A NE y.

→ VYUŽITÍ PŘÍMÉ INTEGRACE

$$y' - \sin x = 0$$

$$y' = \sin x$$

$$y = \int \sin x \, dx$$

$$y = -\cos x + C_1$$

→ NEHOMOGENNÍ ŘEŠENÍ (ZDE I OBECNÉ) ROVNICE, ALE S $C_1 \in R$ TJ. ∞ FUNKCÍ „POSUNUTÝCH PO OSE y" DLE HODNOTY C_1.

→ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ → URČENÍ HODNOTY C_1, ABY FUNKCE $f(x)$ PROCHÁZELA BODEM $[0; 20]$

→ TJ.

$$20 = -\cos 0 + C_1$$

$$20 = -1 + C_1$$

$$\underline{21 = C_1}$$

→ PARTIKUL. ŘEŠENÍ DIFER. ROVNICE $y = -\cos x + 21$

ALE CHTĚJÍ JEŠTĚ SPOČÍTAT $f(\frac{\pi}{2})$ → DOSADIT DO PARTIKUL. ŘEŠENÍ

$$y = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 21 = 0 + 21 = \underline{\underline{21}}$$

Další metody vhodné když řešíme rovnice obsahující již více členů s proměnnými „y“ a jejich derivacemi.

Pro **homogenní rovnici**(buď jako celou homogenní ze zadání, nebo jako homogenní část nehomogenní rovnice)

- separace proměnných (pro difer. rovnice 1. řádu pokud jsme schopni z rovnice „vyseparovat“ výrazy s proměnnou „y“ na jednu stranu a výrazy s proměnnou „x“ na druhou stranu rovnice)
- charakteristická rovnice (pro homogenní diferenciální rovnici prvního i vyššího řádu s konstantními koeficienty „k“ z množiny R, kterými násobíme derivované a nederivované členy „y“, ve tvaru k_1*y`+k_2*y=0 resp. k_1*y``+k_2*y`+k_3*y=0)

2) Separace proměnných

Snažíme se pomocí běžných úprav rovnice získat na jedné straně členy obsahující „y“ a na druhé zbývající výrazy (členy s „x“ a konstanty). A to takovým způsobem, abychom následně mohli obě strany rovnice zintegrovat a tím se zbavit derivací. **Vždy člen „y`“ musí být v čitateli.**

Platí $y` = \frac{dy}{dx}$

Po provedení integrace vyjádříme neznámou “y” a tím získáme homogenní řešení diferenciální rovnice (resp. pokud se dá separací proměnných vyřešit celá nehomogenní rovnice, tak získáme obecné řešení).

NALEZNĚTE OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE

$$1+y^2 - y'\cdot x^5 = 0$$

→ HOMOGENNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU ; NELZE POMOCÍ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE

→ METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH

$$1+y^2 - y'\cdot x^5 = 0$$

$$1+y^2 = y'\cdot x^5 \quad /: 1+y^2 \quad /: x^5$$

$$\frac{1}{x^5} = \frac{y'}{1+y^2} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}\ !}$$

$$\frac{1}{x^5} = \frac{\frac{dy}{dx}}{1+y^2} \quad /\cdot dx$$

$$\frac{1}{x^5}\cdot dx = \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^5}\,dx = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy \qquad \int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-4x^4} + C$$

$$\frac{1}{-4x^4} + C = \operatorname{arctg} y$$

KONSTANTA "C" POUZE U X.

$$\underline{\underline{tg\left(\frac{1}{-4x^4} + C\right) = y}} \qquad C \in R$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ

3) Charakteristická rovnice

V homogenní dif. rovnici s konstantními koeficienty nahradíme výrazy y, y`, y`` resp. obecně $y^{(n)}$novouproměnnou, nejčastěji značenou λ. A to tak, že λ umocníme na mocninu stejnou, jako byl řád derivace. Tedy y →$\lambda^0$ , y`→$\lambda^1$ , y``→λ^2 atd. Vyřešíme vzniklou rovnici a dle vypočtených kořenů zapíšeme homogenní řešení dle následujících pravidel.

Pro rovnici 1. řádu:

$y = C * e^{\lambda x} \quad C \in R$ (ke stejnému tvaru dojdeme i při použití separace proměnných)

Pro rovnici 2. řádu:

- 2 reálné různé kořeny λ_1, λ_2→ $y = C_1 * e^{\lambda_1 x} + C_2 * e^{\lambda_2 x}, C_{1,2} \in R$
- 1 reálný kořen λ → $y = C_1 * e^{\lambda x} + C_2 * x * e^{\lambda x}, C_{1,2} \in R$
- komplexně sdružené koř. $\lambda_{1,2}$= α ± βi → $y = C_1 * e^{\alpha x} * \cos(\beta x) + C_2 * e^{\alpha x} * \sin(\beta x),\ C_{1,2} \in R$

Např.

$y`-3y = 0$	$y``-5y`+6y = 0$
$\lambda - 3 = 0$	$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$\lambda = 3$	$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$
$y = C * e^{3x}\ C \in R$	$y = C_1 * e^{3x} + C_2 * e^{2x}\ \ C_{1,2} \in R$

Řešení **nehomogenní rovnice**(resp. nehomogenní části) takové rovnice

- variace konstanty - často používaná pokud homogenní část řešíme separací proměnných, ale univerzální metoda vhodná na různé typy pravých stran dif. rovnice.
- metoda odhadu (tzv. neurčité koeficienty)– vhodná jen na určité typy pravých stran dif. rovnic. Konkrétně pokud pravá strana obsahuje: **Polynom (mnohočlen) stupně n , exponenciální funkci $e^{\alpha * x}$ či goniometrické funkce cos(β*x) či sin(β*x).** Často používaná pokud homogenní část řešíme charakteristickou rovnicí.

4) Variace konstanty

Homogenní řešení (tj. funkci „y“ y=C*f(x)) obsahující konstantu C upravíme tak, že konstantu C začneme považovat za funkci C(x). Tím získáme výchozí tvar nehomogenního řešení dif. rovnice.

Takto vzniklou funkci zderivujeme a dosadíme do původního zadání dif. rovnice s cílem vypočítat konkrétní tvar funkce C(x). Po určení funkce C(x) (je nutno určitě použít integrály) získáme tedy přesný tvar nehomogenního řešení dif. rovnice y=C(x)*f(x).

A dále již snadno vytvoříme obecné řešení diferenciální rovnice jako součet homogenního řešení a nehomogenního řešení.

NALEZNĚTE OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE

$4x\cdot y' - y = \frac{4}{x}$ → ROVNICE 1. ŘÁDU, NEHOMOGENNÍ

HOMOG. ČÁST POMOCÍ SEPARACE PROMĚNNÝCH

$4x\cdot y' - y = 0$

$4xy' = y \quad /:y \quad /:4x$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4x} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$

$\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{4x} \quad /\cdot dx \text{ A } \int$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{4x}\,dx \qquad \int \frac{1}{4x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x}\,dx$

$\ln|y| = \frac{1}{4}\cdot\ln|x| + c$

$y = e^{\frac{1}{4}\ln|x| + c}$

$y = e^{\ln|x|^{\frac{1}{4}}}\cdot e^{c}$ → C STÁLE KONSTANTA

$y = x^{\frac{1}{4}}\cdot C \Rightarrow y = \sqrt[4]{x}\cdot C$ HOMOG. ŘEŠENÍ

NEHOMOGENNÍ ČÁST POMOCÍ VARIACE KONSTANTY (MÍSTO KONST. C MÁME FUNKCI C(x))

$y = C(x)\cdot\sqrt[4]{x} \rightarrow x^{\frac{1}{4}}$

DERIVACE

$y' = C'(x)\cdot\sqrt[4]{x} + C(x)\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

→ DOSAZENÍ DO ZADÁNÍ PŮVODNÍHO

$4x\cdot\left(C'(x)\cdot\sqrt[4]{x} + C(x)\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}\right) - C(x)\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{4}{x}$

$4x\cdot C'(x)\cdot\sqrt[4]{x} + \cancel{4}x^{1}\cdot C(x)\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot x^{-\frac{3}{4}} - C(x)\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{4}{x}$

$4x\cdot C'(x)\cdot\sqrt[4]{x} + \underbrace{C(x)\cdot x^{\frac{1}{4}} - C(x)\cdot\sqrt[4]{x}}_{\text{VYRUŠÍ SE}} = \frac{4}{x}$

$4x\cdot C'(x)\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{4}{x} \quad /:(4x\cdot\sqrt[4]{x})$

$C'(x) = \frac{\cancel{4}}{x\cdot\cancel{4}x\cdot\sqrt[4]{x}} \qquad 1+1+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$C'(x) = \frac{1}{x^{\frac{9}{4}}} \qquad C'(x) = x^{-\frac{9}{4}}$

$C(x) = \int x^{-\frac{9}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{5}{4}}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}\cdot x^{-\frac{5}{4}}$

→ DOSADÍME DO $y = C(x)\cdot\sqrt[4]{x} = -\frac{4}{5}\cdot x^{-\frac{5}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}\cdot x^{-\frac{4}{4}} = -\frac{4}{5}\cdot x^{-1} = -\frac{4}{5x}$

NEHOMOGENNÍ ŘEŠENÍ $y = -\frac{4}{5x}$

OBECNÉ ŘEŠENÍ
HOMOG. + NEHOMOG.

$y = C\cdot\sqrt[4]{x} - \frac{4}{5x} \qquad C\in R$

5) Metoda odhadu

Podle tvaru pravé strany diferenciální rovnice (nehomogenní části) odhadujeme tvar funkce „y“, který bude nehomogenním řešením.

Pokud je pravá strana ve tvaru: $P_n(x) * e^{\alpha x}$,
kde $P_n(x)$ je polynom stupně **n** (dle největšího exponentu **n**u „x^n“ se jedná o konstantu $x^0 \rightarrow$ polynom 0. stupně ; lineární výraz $x^1 \rightarrow$ polynom 1. stupně, kvadratický výraz $x^2 \rightarrow$ polynom 2. stupně atd.) a $\alpha \in R$.

Odhad funkce „y“ bude mít tvar: $\mathbf{R_n(x) * e^{\alpha x} * x^k}$, kde $R_n(x)$ je polynom stupně **n** zapsaný obecně (0. stupeň = konstanta A, 1. stupeň = A*x+B , 2. stupeň = $A*x^2+B*x+C$ atd.) a „k“ je násobnost hodnoty α jako kořene λ charakteristické rovnice příslušné homogenní dif. rovnice.

Pokud je pravá strana ve tvaru: $P_n(x) * e^{\alpha x} * \cos(\beta x)$ resp. $P_n(x) * e^{\alpha x} * \sin(\beta x)$,

kde opět kde $P_n(x)$ je polynom stupně **n** (viz výše) a $\alpha, \beta \in R$.
Odhad funkce „y“ bude mít tvar: $y = \left[R_n(x) * e^{\alpha x} * \cos(\beta x) + Q_n(x) * e^{\alpha x} * \sin(\beta x)\right] * x^k$, kde $R_n(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy stupně **n** zapsané obecně (viz výše) a „k“ je násobnost komplexního čísla $\alpha \pm \beta i$ jako kořene λ charakteristické rovnice příslušné homogenní dif. rovnice.Odhad bude mít tedy vždy obě goniometrické funkce, i když v zadání dif. rovnice se vyskytuje pouze jedna z nich.

Pozor na případy, kdy je α=0.

Takto vytvořený odhad funkce „y“ poté zderivujeme příslušným počtem derivací (dle řádu dif. rovnice) a dosazujeme do celé původně zadané diferenciální nehomogenní rovnice. Ze vzniklé rovnice např. s využitím porovnávací metody vypočteme neznámé konstanty A, B,C atd. Jejich zjištěné hodnoty dosadíme do stanoveného odhadu funkce “y“ a tím získáme nehomogenní řešení dif. rovnice.

Obecné řešení je pak opět součtem homogenního a nehomogenního řešení.

NAJDĚTE OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE

$y''+2y'-3y=16x\cdot e^{x}$

→ NEHOMOGENNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

→ HOMOGENNÍ ČÁST POMOCÍ CHARAKTER. ROVNICE

$y''+2y'-3y=0$

$\lambda^2+2\lambda-3=0$

$(\lambda+3)\cdot(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=-3 \quad \lambda_2=1$ → 2 RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY

HOMOG. ŘEŠENÍ $y=C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$

$y=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{1x}$

NEHOMOGENNÍ ČÁST → POMOCÍ METODY ODHADU

PRAVÁ STRANA $=16x\cdot e^{1x}$ → 1 JE KOŘENEM CHARAKTER. ROVNICE λ (JEDNÍM KOŘENEM)

POLYNOM 1. STUPNĚ

ODHAD NEHOMOG. ŘEŠ. $y=(A\cdot x+B)\cdot e^{1x}\cdot x^{1}$

→ $y=(A\cdot x^2+B\cdot x)\cdot e^{x}$

→ DERIVACE $y'=(2Ax+B)\cdot e^{x}+(Ax^2+Bx)\cdot e^{x}=e^{x}\cdot(2Ax+B+Ax^2+Bx)$

$y''=e^{x}\cdot(2Ax+B+Ax^2+Bx)+e^{x}\cdot(2A+2Ax+B)=e^{x}\cdot(4Ax+2B+Ax^2+Bx+2A)$

→ DOSAZENÍ DO ZADÁNÍ

$e^{x}\cdot(4Ax+2B+Ax^2+Bx+2A)+2\cdot e^{x}\cdot(2Ax+B+Ax^2+Bx)-3\cdot(Ax^2+Bx)\cdot e^{x}=16x\cdot e^{x}$

→ LZE VYDĚLIT e^{x} A SEČÍST STEJNÉ VÝRAZY

$8Ax+4B+2A=16x$

→ POROVNÁVACÍ METODA

x^1: $8A=16$ → $\boxed{A=2}$

x^0: $4B+2A=0$

$4B+2\cdot 2=0$ → $\boxed{B=-1}$

DOSADIT DO ODHADU → $y=(2\cdot x^2-1x)\cdot e^{x}$ NEHOMOGENNÍ ŘEŠENÍ

→ OBECNÉ ŘEŠENÍ $y=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{1x}+(2x^2-1x)\cdot e^{x} \quad C_{1,2}\in R$

Dále existují např. metody Integrační faktor; Substituce a jiné. Není popsáno v tomto materiálu.

Měli byste umět řešit: Různými metodami najít obecné řešení homogenní či nehomogenní diferenciální rovnice 1. nebo 2. řádu. V případě zadaných počátečních podmínkách z obecného řešení určit partikulární řešení.