MATEMATIKA DERIVACE FUNKCE

Derivace funkce je definována limitou $f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Pokud tato limita existuje, je rovna hodnotě derivace funkce ve zvoleném bodě x_0. Lze ji tedy chápat jako změnu hodnot na ose „y“ vůči změně hodnot na ose „x“.
Např. změna dráhy v čase = rychlost. Změna rychlosti v čase = zrychlení.

Má souvislost s průběhem funkce, protože se jedná o směrnici tečny ke grafu funkce v daném (tzv. tečném) bodě.

Rovnice tečny a normály k f(x) v bodě T[x_0 ; f(x_0)] lze definovat např. těmito vzorci

t: $y - f(x_0) = f`(x_0) * (x - x_0)$,  **n:** $y - f(x_0) = \frac{-1}{f`(x_0)} * (x - x_0)$

Dá se používat více možných tvarů zápisu. Vychází se také z rovnice přímky **y=k*x+q** , kde „k“ je směrnice této přímky a tedy z definice derivace platí f`(x_0)=k. Rovněž platí, že součin směrnic dvou kolmých přímek je roven -1 a protože tečna a normála jsou na sebe kolmé, tak $k_t * k_n = -1$.

Použití na výpočet limit – tzv. L`Hospitalovo pravidlo

Pokud platí $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f`(x)}{g`(x)}$ pokud druhá limita existuje. Tj. limity typu 0/0 či ∞/∞ lze spočítat pomocí derivací.

Použití derivací na analýzu průběhu funkce

Monotonie funkce

$f`(x) > 0$ → f(x) je rostoucí (na intervalech, kde je funkce rostoucí jsou i její tečny rostoucí přímky, mají tedy kladnou směrnici a proto má funkce kladnou derivaci)
$f`(x) < 0$ → f(x) je klesající (na intervalech, kde je funkce klesající jsou i její tečny klesající přímky, mají tedy zápornou směrnici a proto má funkce zápornou derivaci)
$f`(x) = 0$ → stacionární body (extrémy (lokální MAX či lokální MIN), nebo sedlové body)

Extrémy funkce – body, ve kterých funkce nabývá maximální či minimální hodnoty – lokální nebo globální extrémy. Musí se jednat o konkrétní bod (ne nekonečno), který leží v def. oboru a funkce v něm má konkrétní funkční hodnotu (opět ne nekonečno)

Lokální: LOK. MAX v bodě x_0 když $f`(x_0) = 0$ a $f``(x_0) < 0$

LOK. MIN v bodě x_0 když $f`(x_0) = 0$ a $f``(x_0) > 0$

nebo určit podle monotonie funkce, protože v těchto extrémech dochází ke změně monotonie.

Globální (absolutní): největší a nejmenší hodnota (vždy konkrétní číslo), které funkce nabývá (na ose y) na stanoveném intervalu **I** (na ose x) (případně na celém Df).

Zakřivenost (vypuklost) funkce
Určení intervalů z def. oboru, ve kterých se jedná o daný typ. Výpočet pomocí druhé derivace.

$f``(x) > 0$ → f(x) je konvexní (U)
$f``(x) < 0$ → f(x) je konkávní (∩)
$f``(x) = 0$ → body podezřelé z inflexe (inflexní body)

Inflexní body – body, ve kterých funkce mění svou zakřivenost. Podobně jako u extrémů se musí jednat o body z def. oboru s konkrétní hodnotou na obou osách „x“ i „y“, kterými funkce prochází.

Taylor. polynom n-tého stupně funkce f(x) v bodě x=a.

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f`(a)}{1!} * (x-a) + \frac{f``(a)}{2!} * (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x-a)^n$$

Slouží jako možnost aproximace zvolené funkce pomocí polynomické funkcí v okolí vybraného bodu ležícího na původní funkci.

Dále se derivace využívají v integrálech, diferenciálních rovnicích atd.